

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa finală

Iași, 17 Aprilie 2006

CLASA A XII-A

Problema 1. Fie K un corp finit. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) $1 + 1 = 0$;
- b) oricare ar fi $f \in K[X]$ cu $\text{grad} f \geq 1$, rezultă că $f(X^2)$ este reductibil.

Problema 2. Să se arate că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\pi}{4} - n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx \right) = \int_0^1 f(x) dx,$$

unde $f(x) = \frac{\arctg x}{x}$ dacă $x \in (0, 1]$ și $f(0) = 1$.

Problema 3. Fie G un grup finit cu n elemente ($n \geq 2$) și p cel mai mic factor prim al lui n . Dacă G are un singur subgrup H cu p elemente, arătați că H este conținut în centrul lui G . (Centrul lui G este multimea $Z(G) = \{a \in G | ax = xa, \forall x \in G\}$)

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Să se arate că există $c \in (0, 1)$ astfel încât

$$\int_0^c xf(x) dx = 0.$$

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.